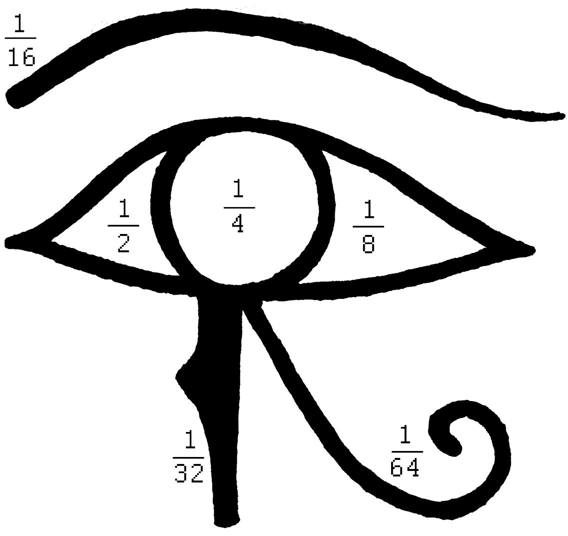
ZKUSME MĚŘIT MĚŘICÍ

Hana Vymazalová

Mezi matematickými texty, které se ze starověkého Egypta dochovaly do dnešních dnů, vynikají dvě dřevěné tabulky uchovávané v Egyptském muzeu v Káhiře.[1] Tabulky měří 46,5 × 26 cm a 47,5 × 25 cm a byly nalezeny v Achmímu v jižním Egyptě. Jejich povrch je pokryt tenkou vrstvou sádry, aby byl uzpůsoben k psaní. Hieratické záznamy, jež jsou na obou tabulkách doposud poměrně dobře čitelné, pocházejí z období Střední říše a zahrnují seznamy osobních jmen, zbytek dopisu a matematické výpočty.

Výpočty zaznamenané na káhirských tabulkách se věnují jedinému matematickému tématu, totiž používání specifické jednotky objemu. Staří Egypťané používali jako základní jednotku pro měření množství obilí jednu měřici.[2] Měřice se dělila na tzv. zlomky Horova oka – polovinu, čtvrtinu, osminu, šestnáctinu, dvaatřicetinu a čtyřiašedesátinu, pro něž byly v egyptském písmu vyhrazeny speciální znaky odlišné od znaků odpovídajících obyčejným zlomkům. Tyto značky dohromady tvoří Horovo oko v*edžat* (obr. 1) a pouze jimi se vyjadřovaly části měřice.



Obr. 1 Symbol Hórova oka rozčleněný na zlomky používané v souvislosti s měřicí.

[1] Tabulky nesou označení 25367 a 25368 a jsou popsány v Daressy (1901).

Pro velmi malé části měřice se používalo menší jednotky ro, pro níž platilo, že 1 měřice byla rovna 320 ro. Jedné čtyřiašedesátině, nejmenšímu zlomku měřice, tedy odpovídalo 5 ro. Dvojnásobná, čtyřnásobná či stonásobná měřice naopak sloužila k vyjadřování obzvláště velkých množství obilí. (Tyto nadměrné jednotky se však ve výpočtech na káhirských tabulkách nevyskytují.) [3]

Výpočty na káhirských tabulkách ukazují metodu, pomocí níž byly zadané „obyčejné" zlomky, tedy části měřice převedeny na kombinaci zlomků Horova oka. Egyptští písaři tuto jednotku velice často potřebovali a museli tedy skvěle ovládat používání specifického zlomkového systému měřice. Káhirské tabulky nabízejí doklad procvičování převodů několika zlomků s lichým jmenovatelem a jednoho zlomku se sudým jmenovatelem. Každý z těchto výpočtů – s výjimkou případu se sudým jmenovatelem – se na tabulkách několikrát opakuje.

Převody, které si neznámý písař procvičoval, prozrazují dvě odlišné metody výpočtu. První z nich byla použita pouze pro třetinu měřice, druhá metoda se vztahuje k sedmině, desetině, jedenáctině a třináctině měřice.[4]

Výpočty sestávají ze dvou částí. První tvoří samotný proces převodu zlomku na zlomky Horova oka a po něm následuje zkouška správnosti. Výpočty nejsou doplněny žádným zadáním či komentáři, což plně odpovídá charakteru písemných procvičování. Zajímavé je, že výsledek příkladu, tedy hodnota odpovídající zadanému zlomku v kombinaci zlomků Horova oka, není nikdy ve výpočtu zvýrazněná. Můžeme ji však snadno nalézt jako předmět dalšího počítání ve druhé části příkladu, zkoušce. Pro přehlednost jsou zlomky měřice psány kurzívou, aby byly odlišitelné od „obyčejných" zlomků.

Výpočet pro třetinu měřice se na tabulkách objevuje dvakrát. Oba výpočty jsou prosty chyb, což – jak uvidíme dále – není samozřejmostí. První část výpočtu stanoví třetinu z čísla 5, neboť 5 ro je rovno čtyřiašedesátině měřice (tedy se jedná o třetinu $^1/_{64}$ měřice). Následuje určení třetiny měřice pomocí zdvojnásobování výsledku dosaženého v prvním kroku. V závěru je provedena zkouška, v jejímž prvním řádku je zmíněn výsledek výpočtu. Třetina měřice je rovna $^1/_4 + {}^1/_{16} + {}^1/_{64}$ měřice + 1 + $^2/_3$ ro.

[2] Měřice je známa i z dalších matematických textů, zejména ze slovních úloh týkajících se výpočtu objemu, příkladů na výrobu chleba a piva z obilí a několika dalších matematických výpočtů. Rovněž se měřice často objevuje v textech hospodářského charakteru, v seznamech zboží či záznamech o platbách. Viz např. Vymazalová (2002).

[3] Více k egyptským jednotkám viz Verner – Bareš – Vachala (1997), Möller (1906), Reineke (1959).

[4] Úplný přehled výpočtů zaznamenaných na káhirských tabulkách viz Vymazalová (2002).

1	$^1/_3$
2	$^2/_3$
4	$1 + {}^1/_3$
$^1/_{64}$	$1 + {}^2/_3$
$^1/_{32}$	$3 + {}^1/_3$
$^1/_{16}$	$^1/_{64} + 1 + {}^2/_3$
$^1/_8$	$^1/_{32} + 3 + {}^1/_3$
$^1/_4$	$^1/_{16} + {}^1/_{64} + 1 + {}^2/_3$
$^1/_2$	$^1/_8 + {}^1/_{32} + 3 + {}^1/_3$
\1	$^1/_4 + {}^1/_{16} + {}^1/_{64} + 1 + {}^2/_3$
\2	$^1/_2 + {}^1/_8 + {}^1/_{32} + 3 + {}^1/_3$

První část výpočtu lze vyjádřit rovnicí $^1/_3 \times 5 = 1 + {}^2/_3$. Třetina je sečtena se svým čtyřnásobkem, kterého je dosaženo zdvojnásobováním (pravý sloupec obsahuje hodnoty násobků třetiny, zatímco levý sloupec ukazuje, o jaký násobek se jedná). Výsledek tohoto kroku se objevuje až v následující části jako hodnota odpovídající třetině nejmenšího zlomku měřice, čtyřiašedesátiny, jež je rovna 5 ro.

V následujících řádcích výpočtu se provádí zdvojnásobování prvního výsledku. Tímto způsobem se postupně stanoví třetina všech částí Horova oka. Třetinu měřice je tedy možné snadno spočítat zdvojnásobením hodnoty odpovídající polovině měřice. Zdvojnásobování zlomků Horova oka je – jak můžeme vidět ve výpočtu – velice snadné, z tohoto ohledu byl systém zlomků měřice značně praktický.

Zkouška v závěru výpočtu ověřuje, že 3 krát výsledek, tedy $3 \times ({}^1/_4 + {}^1/_{16} + {}^1/_{64})$ měřice + $(1 + {}^2/_3)$ ro, se skutečně rovná jedné měřici. Výsledek se zdvojnásobí, takže můžeme vidět pod sebou hodnoty třetiny a dvou třetin měřice. Jejich součet je polovina + čtvrtina + osmina + šestnáctina + dvaatřicetina + čtyřiašedesátina měřice + 5 ro, což je celkem $^{64}/_{64}$, tj. jedna měřice.

Druhá metoda stanovení určité hodnoty zlomku měřice je o něco jednodušší. Měřice v podobě 320 ro se nejprve vynásobí zadaným zlomkem – jinými slovy se 320 ro vydělí jmenovatelem zlomku. Dle egyptského způsobu dělení se jmenovatel násobil, dokud nebylo dosaženo hodnoty 320. Stejně jako v případě první metody není výsledek dělení výslovně uveden. Zdá se, že byl automaticky převeden z jednotek ro do systému zlomků měřice. V této podobě se objevuje ve zkoušce, která bezprostředně následovala na konci výpočtu. Zkouška byla provedena vynásobením výsledku jmenovatelem zadaného zlomku.

Z výpočtů sedminy, desetiny, jedenáctiny a třináctiny měřice si zde ukážeme po jednom reprezentativním příkladu. Všechny tyto výpočty se na tabulkách několikrát opakovaly a mnohé z nich obsahovaly chyby, o nichž podrobněji pohovoříme u jednotlivých úloh.

Výpočet sedminy měřice je na tabulkách zaznamenán čtyřikrát a všechny verze jsou poznamenány chybami a opomenutími.

1	7
10	70
20	140
40	280
2	12[sic]
4	24[sic]
$^1/_7$	1
$^1/_4 + {}^1/_{28}$	2
$^1/_2 + {}^1/_{14}$	4
1	$^1/_8 + {}^1/_{64} + {}^1/_2 + {}^1/_7 + {}^1/_{14}$
2	$^1/_4 + {}^1/_{32} + 1 + {}^1/_4$ [$+ {}^1/_7 + {}^1/_{28}$]
4	$^1/_2 + {}^1/_{16} + 2 + {}^1/_2 + {}^1/_4 + {}^1/_{14} + {}^1/_{28}$

V první části výpočtu je provedeno dělení $320 \div 7 = 45 + {}^1/_2 + {}^1/_7 + {}^1/_{14}$, při němž byly postupným znásobováním sedmi (jmenovatel zadaného zlomku) určeny násobky odpovídající celkem 320 ro. Během dělení se písař dopustil dvou chyb, u dvojnásobku a čtyřnásobku sedmi. Je zajímavé, že tyto chyby se opakují ve všech čtyřech opisech téhož výpočtu, avšak v žádném z nich neovlivnily výsledek dělení. Hodnota sedminy měřice je uvedena v prvním řádku zkoušky ve tvaru ($^1/_8 + {}^1/_{64}$) měřice + ($^1/_2 + {}^1/_7 + {}^1/_{14}$) ro. Jednotky ro tedy opět byly automaticky převedeny na zlomky Horova oka, podle vztahu 5 ro = $^1/_{64}$ měřice, tedy 45 ro = $^1/_8 + {}^1/_{64}$ měřice.

V následujícím kroku výpočtu byla provedena zkouška vynásobením výsledku sedmi, tedy jednou, dvěma a čtyřmi. Můžeme si ověřit, že součet všech násobků, tedy sedminásobek, je $^1/_2 + {}^1/_4 + {}^1/_8 + {}^1/_{16} + {}^1/_{32} + {}^1/_{64}$, což dává součet $^{63}/_{64}$ měřice, a $2 + {}^1/_2 + {}^1/_4 + {}^1/_{14} + {}^1/_{28} + 1 + {}^1/_4 + {}^1/_7 + {}^1/_{28} +$ $+ {}^1/_2 + {}^1/_7 + {}^1/_{14}$, tedy 5 ro = $^1/_{64}$ měřice. I v tomto kroku je ve většině verzí výpočtu několik chyb a opomenutí, v jedné z nich je vynechán celý poslední řádek zkoušky, v jiné jeden řádek dělení, v dalším jsou spojeny dva různé řádky dělení do jednoho, atp.

Chyby, jichž se písař v úloze dopustil, poměrně jasně naznačují, jak byl při počítání nepozorný. Zdá se, že výpočet jednoduše opisoval, místo aby jej znovu a znovu počítal a procvičoval. Způsobené chyby tak nemohly ovlivnit výsledek, a tudíž zůstaly nepovšimnuty.

Výpočet desetiny měřice je na káhirských tabulkách zapsán pouze jednou. Opakování pravděpodobně nebylo zapotřebí, protože jmenovatel je v tomto případě sudý a úloha je tedy poměrně snadná.

1	10
10	100
20	200
2	20
1	$^{1}/_{16} + ^{1}/_{32} + 2$
\2	$^{1}/_{8} + ^{1}/_{16} + 4$
4	$^{1}/_{4} + ^{1}/_{8} + ^{1}/_{64} + 3$
\8	$^{1}/_{2} + ^{1}/_{4} + ^{1}/_{32} + ^{1}/_{64} + 1$

Výsledkem dělení 320 ÷ 10 v první části výpočtu je 32 ro. Po převedení na zlomky Horova oka dostáváme výsledek ($^{1}/_{16} + ^{1}/_{32}$) měřice + 2 ro, který je předmětem násobení v následující zkoušce. Desetinásobek, čili dvojnásobek + osminásobek, dává $^{63}/_{64}$ měřice + 5 ro, tedy celkem $^{64}/_{64}$ měřice.

Výpočet pro stanovení jedenáctiny měřice se na tabulkách opakuje čtyřikrát a ve všech případech obsahuje chyby.

1	11
10	110
20	220
2	22
4	44
8	88
$^{1}/_{11}$	1
\1	$^{1}/_{16} + ^{1}/_{64} + 4 + ^{1}/_{11}$
\2	$^{1}/_{8} + ^{1}/_{32} + ^{1}/_{64} + 3 + ^{1}/_{6} + ^{1}/_{66}$
4	$^{1}/_{4} + ^{1}/_{16} + ^{1}/_{32} + ^{1}/_{64} + 1^{\text{sic}} + ^{1}/_{33}$
\8	$^{1}/_{2} + ^{1}/_{8} + ^{1}/_{16} + ^{1}/_{32} + 2 + ^{2}/_{3} + ^{1}/_{22} + ^{1}/_{66}$

Dělení 320 ÷ 11 není obtížné a výsledku 29 + $^{1}/_{11}$ je dosaženo bez větších problémů. Hodnota 29 + $^{1}/_{11}$ ro odpovídá ($^{1}/_{16} + ^{1}/_{64}$) měřice + (4 + $^{1}/_{11}$) ro. Ve zkoušce, která následuje, si můžeme ověřit správnost výsledku sečtením trojnásobku s osminásobkem. Dostaneme $^{62}/_{64}$ a 10 ro = $^{2}/_{64}$, což dává celkem jednu měřici.

Ve třetím řádku zkoušky chybí $^{1}/_{3}$ ro a tato chyba se opakuje ve všech opisech výpočtu jedenáctiny měřice. V dalších verzích úlohy se písař dopustil i jiných nepozorností, jako například chybných hodnot u dvojnásobku a čtyřnásobku jedenácti. Stejně jako v případě sedminy měřice tedy písař úlohy zjevně spíše opisoval, než procvičoval.

Ze tří opisů výpočtu třináctiny měřice, které jsou na tabulkách zapsány, je pouze jeden úplný. Ostatní dva byly ukončeny předčasně.

1	13
10	130
20	260
2	26
4	52
$^{1}/_{13}$	1
$^{1}/_{8} + ^{1}/_{52} + ^{1}/_{104}$	2
$^{1}/_{4} + ^{1}/_{26} + ^{1}/_{52}$	4
$\backslash ^{1}/_{2} + ^{1}/_{13} + ^{1}/_{26}$	8
1	$^{1}/_{16} + 4 + ^{1}/_{2} + ^{1}/_{13} + ^{1}/_{26}$
2	$^{1}/_{8} + ^{1}/_{32}{}^{\text{sic}} + 4 + ^{1}/_{13} + ^{1}/_{52} + ^{1}/_{104}$
4	$^{1}/_{4} + ^{1}/_{32} + ^{1}/_{64} + 2^{\text{sic}} + ^{1}/_{4} + ^{1}/_{8} + ^{1}/_{13} + ^{1}/_{104}$
8	$^{1}/_{2} + ^{1}/_{16} + ^{1}/_{32} + ^{1}/_{64} + 1 + ^{1}/_{2} + ^{1}/_{4} + ^{1}/_{8} + ^{1}/_{26} + ^{1}/_{104}$

První krok výpočtu zahrnuje dělení 320 ÷ 13, jehož výsledkem je $^{1}/_{16}$ měřice (24 ro) + (4 + $^{1}/_{2}$ + $^{1}/_{13}$ + $^{1}/_{26}$) ro. Zkouška správnosti dává $^{62}/_{64}$ měřice a 10 ro, tedy $^{2}/_{64}$ měřice. Ve dvanáctém a třináctém řádku zkoušky se písař dopustil chyb, když zapsal $^{1}/_{32}$ na místo $^{1}/_{64}$ a 2 na místo 3 ro. Stejně jako v případech chyb v předcházejících úlohách, ani zde neovlivnily tyto písařské chyby výsledek výpočtu.

Další verze tohoto výpočtu nebyly dokončeny. První z nich obsahuje více chyb. V prvním řádku zkoušky písař udělal chybu a k $^{1}/_{16}$ měřice omylem připsal ještě $^{1}/_{64}$. V každém dalším řádku se následně objevuje hodnota, jež sem nepatří, což dokazuje, že v tomto případě písař skutečně počítal, nikoli opisoval. U čtyřnásobku písař pravděpodobně shledal, že s výpočtem není něco v pořádku a počítání zanechal.

Třetí výpočet třináctiny měřice byl ukončen po spočtení čtyřnásobku třinácti. Ve výpočtu byl vynechán řádek odpovídající dvacetině třinácti, což mohl být důvod pro opuštění úlohy.

Výpočty zaznamenané na káhirských tabulkách lze popsat jako převody určitých zlomků na systém vytvořený pro jednotku měřice, na tzv. zlomky Horova oka.

Na tabulkách lze rozlišit dvě metody počítání. Jedna z nich se vztahovala k určení sedminy, desetiny, jedenáctiny a třináctiny měřice a sestávala z dělení 320 ro jmenovatelem zadaného zlomku. Ve všech případech byla správnost výsledku ověřena zkouškou.

Pro stanovení třetiny měřice se užívala jiná metoda, při níž byla nejprve spočítána třetina z 5 ro, tedy z $^{1}/_{64}$ měřice. Zdvojnásobováním výsledku bylo dosaženo hodnoty třetin všech zlomků Horova oka. Výsledek byl následně určen zdvojnásobením hodnoty odpovídající třetině poloviny měřice. Správnost výsledku opět potvrdila zkouška v závěru úlohy.

Odlišná metoda v případě třetiny měřice se může zdát zarážející. Ve staroegyptské matematice však zlomky $^1/_3$ a $^2/_3$ hrály důležitou úlohu a počítání s nimi patřilo mezi základní dovednosti egyptských počtářů. Způsob hledání třetiny měřice, který využívá výhod zdvojnásobování $^1/_3$ a $^2/_3$, se tedy spíše jeví značně praktickým. Tato metoda navíc ukázkově využila možnosti počítání se zlomky Horova oka. V ostatních popsaných případech by tato metoda postrádala značnou část svých výhod, což mohlo být důvodem pro odlišení metod počítání různých případů.

Můžeme předpokládat, že to nebyl písař, který zapsal výpočty na káhirských tabulkách, kdo zavedl dvě odlišné metody pro počítání částí měřice. Způsoby řešení těchto úloh byly bezpochyby vytvořeny mnohem dříve, a to v době, kdy byly egyptská jednotka měřice a k ní náležející systém zlomků uvedeny v užívání. Ti, kdo je zaváděli, nejspíše museli stanovit i odpovídající metody pro převádění různých částí měřice na tento systém.

Je zřejmé, že v úlohách zaznamenaných na káhirských tabulkách byly předmětem zájmu způsoby řešení, nikoli výsledky. V opačném případě bychom očekávali spíše využití tabulek, které jsou doloženy např. v případě sčítání zlomků[5] či určování dvojnásobku zlomků s lichým jmenovatelem[6].

V tomto případě nicméně výsledek výpočtů není zvýrazňován a dokonce ani výslovně uváděn, jak to známe z matematických úloh na dochovaných papyrech.[7] Písař byl dobře obeznámen se systémem zlomků náležejícím k jednotce měřice, neboť převody mezi jednotkami ro a zlomky Horova oka prováděl zcela automaticky. Důležité tedy musely být právě postupy. Zarážející je, že většinu výpočtů písař zjevně opisoval i s chybami, jichž se dopustil. Nepůsobí tedy jako příliš svědomitý počtář.

Povšimneme-li si blíže matematických operací užívaných ve výpočtech, zjistíme, že pro řešení zadaných úloh stačilo dělení a násobení zlomků. Počítání se zlomky tvořilo stěžejní součást staroegyptské matematiky. Zajímavost těchto výpočtů však spočívá ve skutečnosti, že se týkaly dvou druhů zlomků, zapisovaných dvěma druhy znaků.

Je zjevné, že písař kladl důraz na provedení postupů výpočtu. Systematicky si procvičoval, *jak* dospět k výsledku zadaných problémů, aby byl schopen vypočítat libovolnou část měřice. Není však jisté, zda musel způsobu řešení také do detailu rozumět.

---

[5] Tabulka sčítání zlomků je zaznamenána na koženém svitku z Britského muzea, viz Glanville 1927.

[6] Více k tzv. tabulkám *2 ÷ n* na Rhindově a Káhúnském papyru viz Eisenlohr (1891), Peet (1023), Chace (1979), Robins – Shute (1998), Griffith (1898). Viz rovněž Vymazalová (2001).

[7] Viz úlohy v Rhindově papyru: Eisenlohr (1891), Peet (1023b), Chace (1979), Robins – Shute (1998), Vymazalová (2001), Vymazalová (2003), Moskevském papyru: Struve (1930), papyrových zlomcích z Káhúnu: Griffith (1898), Berlínských papyrových zlomcích: Shack-Shackenburg (1900), Shack-Shackenburg (1902).

Káhirské tabulky a výpočty částí měřice propojují egyptskou matematiku s praktickou stránkou písařského vzdělání. V matematických textech, např. v Rhindově papyru,[8] Moskevském papyru, na papyrech z Káhúnu a Berlína, jsou zachyceny příklady vztahující se k vyučování a získávání základních matematických znalostí ve starověkém Egyptě. Význam Káhirských tabulek spočívá právě v tom, že představují příklad jejich skutečného využití.

Literatura

Chace, Arnold Buffum
1979 *The Rhind Mathematical Papyrus*, Oberlin: National Council of Teachers of Mathematics;

Daressy, Georges
1901 *Catalogue générale des Antiquités égyptiennes du Musée de Cairo, Ostraca*, Cairo: IFAO, s. 95–96;
1906 „Calculs égyptiennes du Moyen-empire“, RecTrav 28, 62–72;

Eisenlohr, August Adolf
1891 *Ein mathematisches Handbuch der alten Aegypter*, Leipzig: Hinrichs'sche Buchhandlung;

Glanville, Stephen Ranulph Kingdon
1927 „The Mathematical Leather Roll in the British Museum“, JEA 13, s. 232–239;

Griffith, Francis Llevelyn
1898 *Hieratic Papyri from Kahun and Gurob*, London: Quaritch, plate 8, no. IV.2;

Möller, George
1911 „Die Zeichen für die Bruchteile des Hohlmaßes und das Uzatauge“, ZÄS 48, s. 99–105;

Peet, Thomas Erik
1923a „Arithmetic in the Middle Kingdom“, JEA 9, s. 91–95;
1923b *The Rhind Mathematical Papyrus*, London: Hodder & Stoughton Limited;

Reineke, Walter Friedrich
1959 „Der Zusammenhang der altägyptischen Hohl- und Langenmaße, MIO 9, s. 145–163;

Robins, Gay – Shute, Charles
1998 *The Rhind Mathematical Papyrus*, London: British Museum Press;

Schack-Schackenburg, Hans
1900 „Der Berliner Papyrus 6619“, ZÄS 38, s. 135–140;
1902 „Das kleinere Fragment des Berliner Papyrus 6619, ZÄS 40, s. 65–66;

Struve, Vasilij Vasiljevič
1930 *Mathematischer Papyrus des Staatlichen Museums der schönen Künste in Moscau*, Berlin: J. Springer;

[8] Vymazalová (2003).

Verner, Miroslav – Bareš, Ladislav – Vachala, Břetislav
1997 *Ilustrovaná encyklopedie starého Egypta*, Praha: Karolinum;

Vymazalová, Hana
2001 *Řešení matematických problémů v egyptských textech*, Praha, diplomová práce, s. 43–53;
2002 „The Wooden Tablets from Cairo: The Use of the Grain Unit *ḥḳ3t* in Ancient Egypt", ArOr 70/1, s. 27–42;
2003 „Odraz úřednické praxe v úlohách Rhindova matematického papyru", PES 2, 202–212.